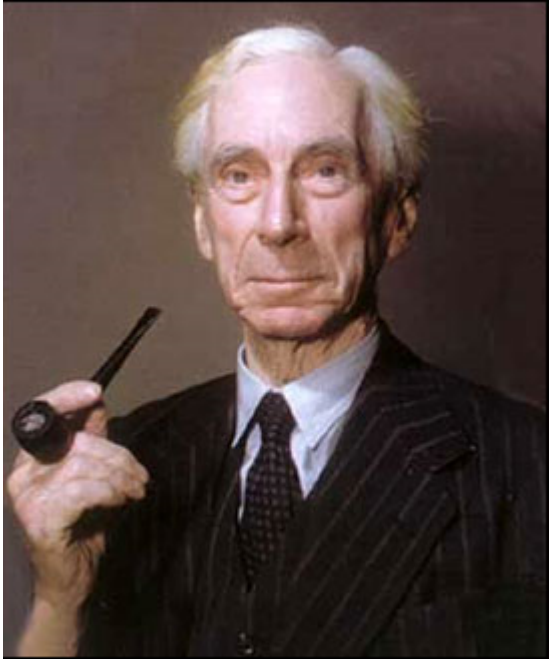


AlNuSet en tant qu'instrument de médiation sémiotique pour l'introduction de concepts algébriques

TD1-Thème 2

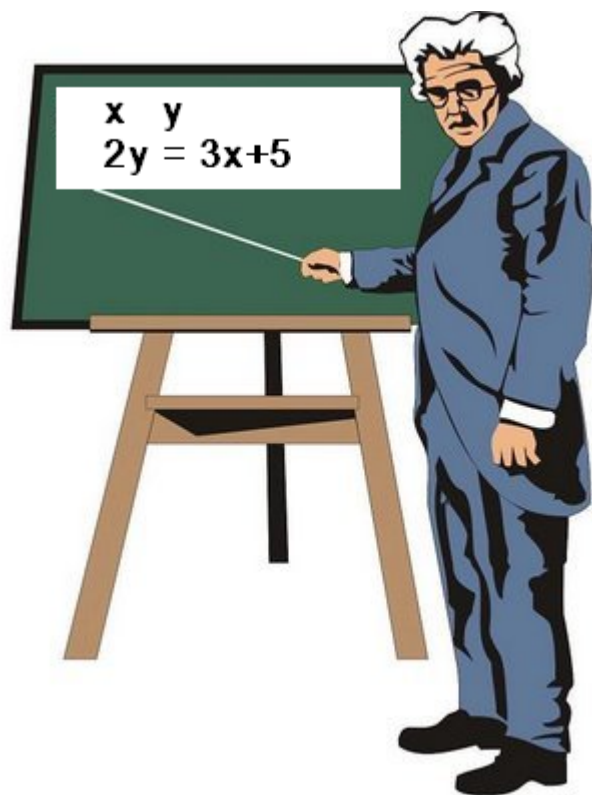
Elisabetta Robotti, Bettina Pedemonte, PhD

DiDiMa srl. - Istituto per le Tecnologie Didattiche
Consiglio Nazionale delle Ricerche
Genova, Italy



“When we come to algebra, and have to operate with x and y , there is a natural desire to know what x and y really are. That, at least, was my feeling: I always thought the teacher knew what they really were, but would not tell me.”

Bertrand Russell, An Outline of Philosophy, 1927

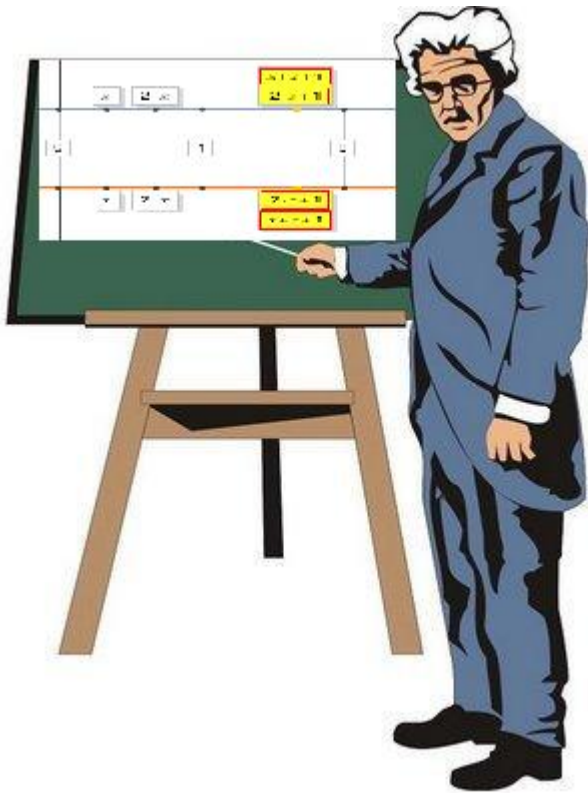


L'enseignant sait bien ce que sont x et y , mais il n'a pas les bons outils pour permettre aux étudiants d'appréhender ce que représentent ces deux lettres dans le domaine algébrique.

La recherche didactique des 20 dernières années a démontré que :

- les **difficultés** dans l'apprentissage de l'algèbre sont principalement **de nature sémantique**
- les erreurs qui émergent au niveau syntaxique montrent **l'incapacité des élèves à justifier les règles algébriques**

Il n'y a pas d'outils pour aider les enseignants à construire des activités didactiques capables de développer une pensée algébrique qui trouve ses racines dans le plan sémantique.



AlNuSet a été projeté pour développer une didactique innovatrice de l'algèbre



AlNuSet comme **instrument** de médiation sémiotique



Élève(s)

Tâche



Savoir mathématique



Culture

MEDIATION

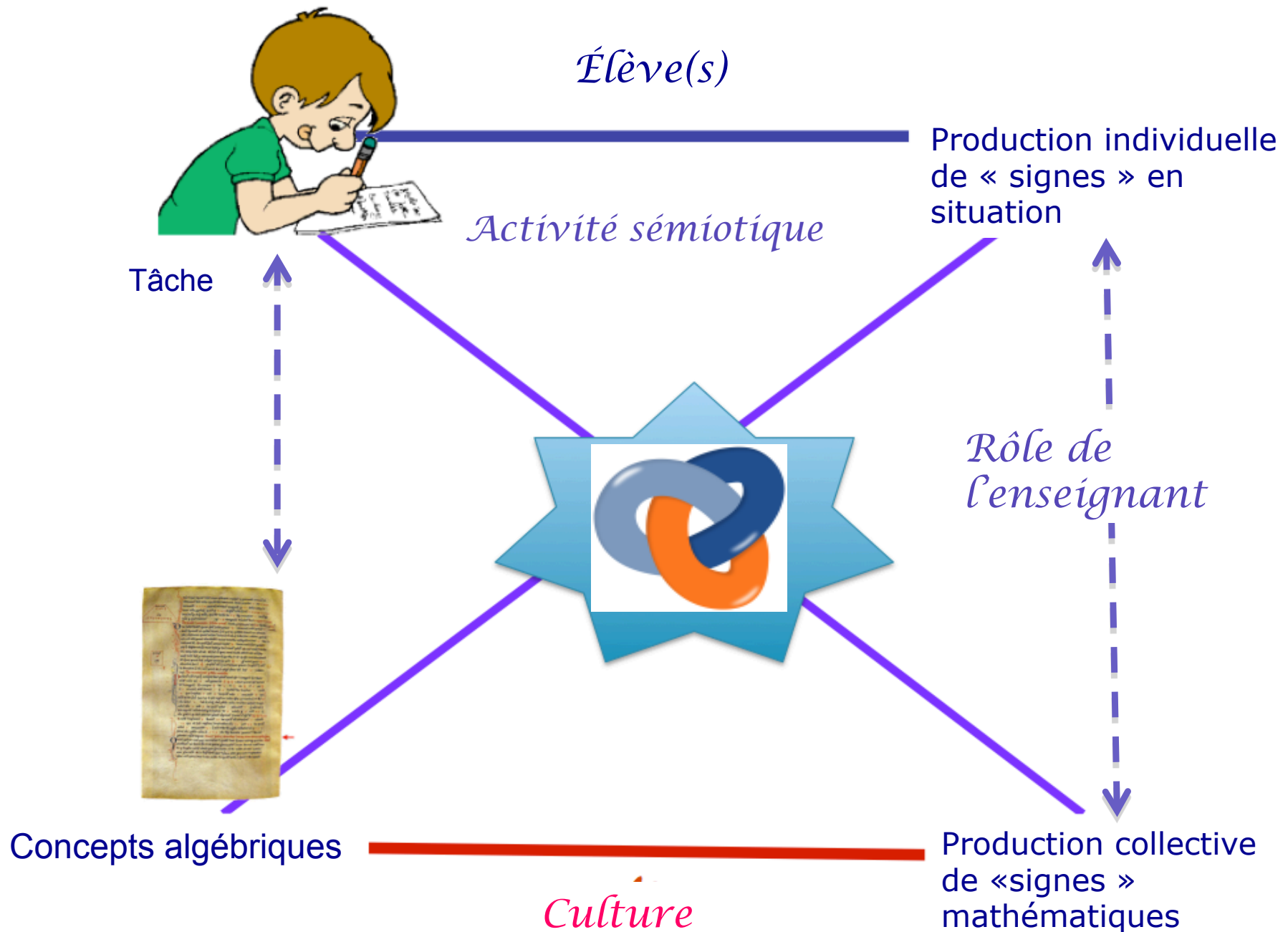
Potentiel sémiotique de
AINuSet:

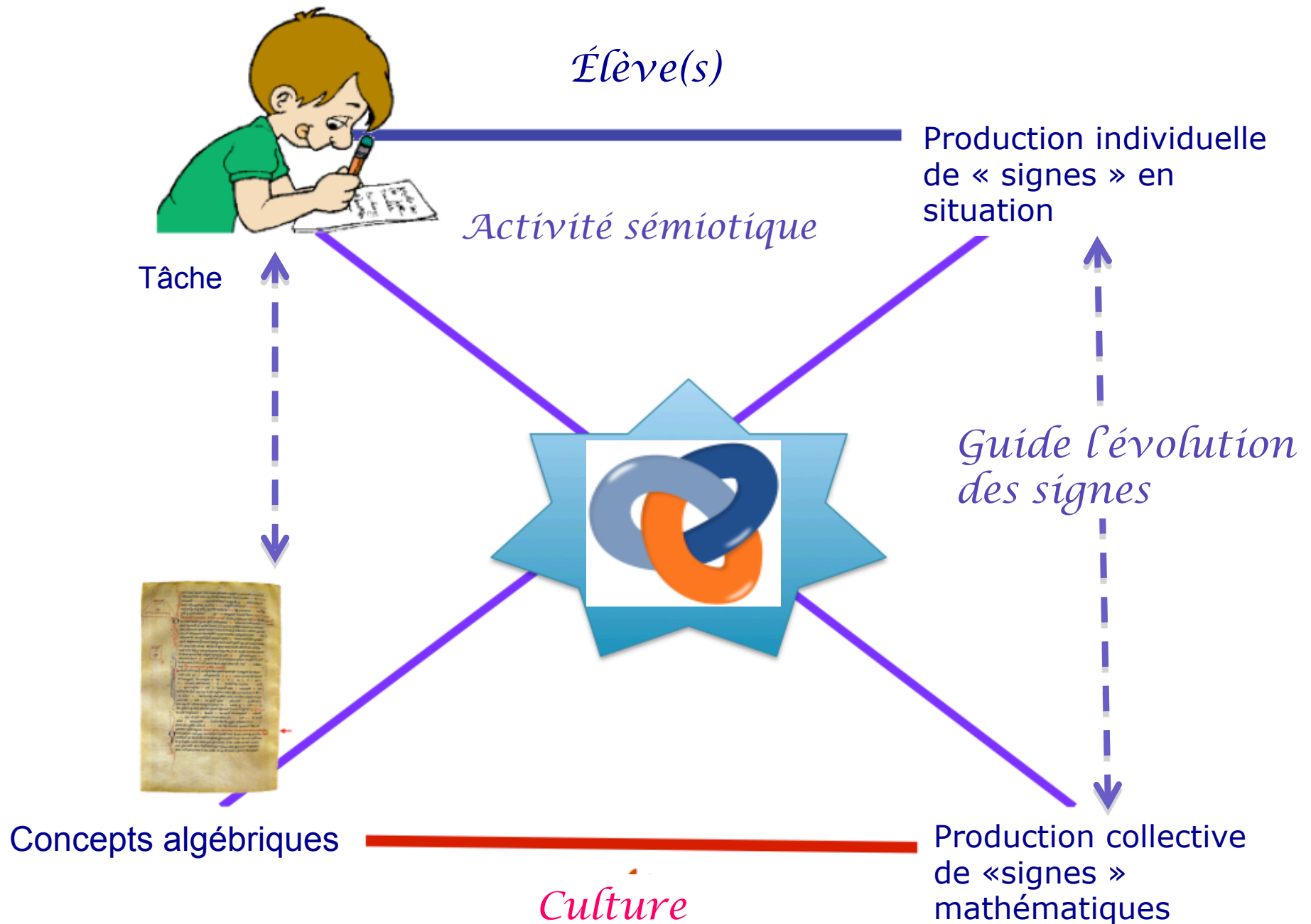
L'artefact se relie :

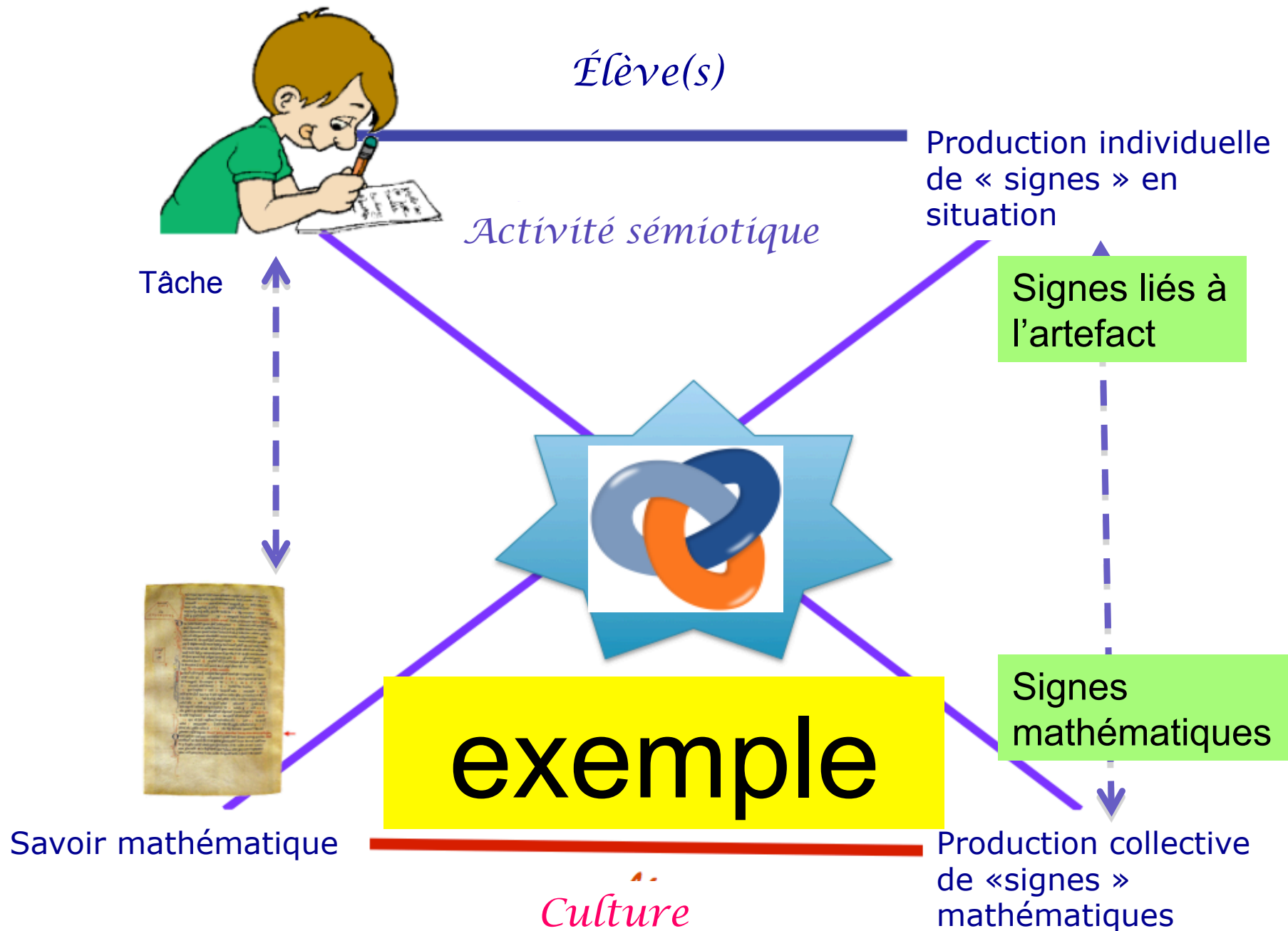
- D'un côté au **devoir**
(accessible aux élèves)

Et

- D'autre côté au **savoir
mathématique**



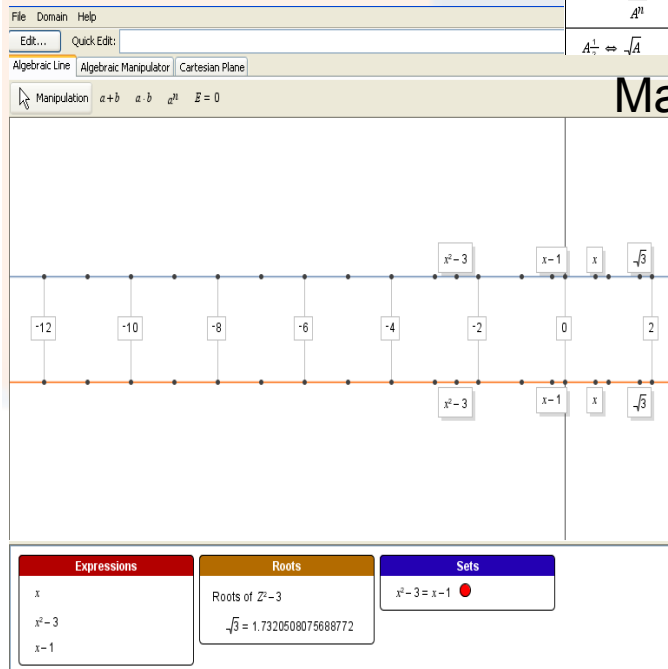






AINuSet – Algebra of Numerical Sets

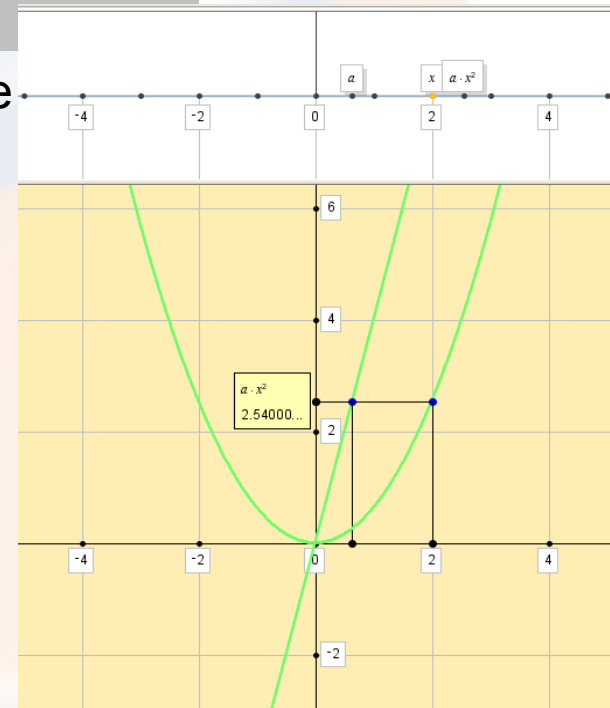
Droite algébrique.



Manipulateur algébrique

Algebraic Line Algebraic Manipulator Cartesian Plane		
User Rules Show Import... Export... Clear		
Addition	Multiplication	
$A+B \Leftrightarrow B+A$	$A \cdot B \Leftrightarrow B \cdot A$	$(a-b) \cdot (a+b)$
$A+(B+C) \Leftrightarrow (A+B)+C$	$A \cdot (B \cdot C) \Leftrightarrow (A \cdot B) \cdot C$	$(a-b) \cdot a + (a-b) \cdot b$
$A \Leftrightarrow A+0$	$A \Leftrightarrow A \cdot 1$	$a \cdot a - b \cdot a + (a-b) \cdot b$
$A+(-A) \Leftrightarrow 0$	$A \cdot 0 \Leftrightarrow 0$	$a \cdot a - b \cdot a + a \cdot b - b \cdot b$
$A-B \Leftrightarrow A+(-B)$	$-A \Leftrightarrow -1 \cdot A$	$a \cdot a + (-a \cdot b) + a \cdot b - b \cdot b$
$a_1+a_2+\dots \Leftrightarrow x$	$1 \Leftrightarrow -1 \cdot -1$	$a \cdot a + 0 - b \cdot b$
$n \Leftrightarrow a+b$	$A \cdot \frac{1}{A} \Leftrightarrow 1$	$a \cdot a - b \cdot b$
Powers		
$A^n \Leftrightarrow A \cdot A \cdot \dots$	$\frac{A}{B} \Leftrightarrow A \cdot \frac{1}{B}$	$a^2 - b \cdot b$
$A^{n_1} \cdot A^{n_2} \cdot \dots \Leftrightarrow A^{n_1+n_2+\dots}$	$\frac{1}{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots} \Leftrightarrow \frac{1}{A_1} \cdot \frac{1}{A_2} \cdot \dots$	$a^2 - b^2$
$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots)^n \Leftrightarrow A_1^n \cdot A_2^n \cdot \dots$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \Leftrightarrow x$	
$(A^n)^m \Leftrightarrow A^{n \cdot m}$	$n \Leftrightarrow p_1 \cdot p_2 \cdot \dots$	
$A^{-n} \Leftrightarrow \frac{1}{A^n}$		
$\frac{1}{A} \Leftrightarrow \sqrt{A}$		
	Distribute / Factor	
	$A \cdot (B_1+B_2+\dots) \Leftrightarrow A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + \dots$	

Plan cartésien



Élève(s)



Activité sémiotique

x est un nombre entier. Ecris une expression qui représente le triple de x.

Insère cette expression dans la droite algébrique. Ta réponse est correcte ?

Ecris une expression qui représente le successeur du triple de x. Représente l'expression dans la droite algébrique et vérifie ta réponse.

Considère l'expression $x+2x+1$. Compare cette expression avec la précédente. Vérifie la réponse en utilisant DA et MA de AINuSet.



Expression dépendante d'une variable, Identité

Culture

-Construction de l'expression $3*x$; Déplacement de x sur la droite de façon que $3*x$ soit trois fois la valeur de x
Déplacement de x sur la droite de façon que les expressions $3*x + 1$ et $x+2x+1$ se superposent
-Post-it pour le vérifier

Signes liés à l'artefact

Signes mathématiques

-variable
-expression dépendante d'une variable
- Expressions équivalentes
-quantificateur \forall



Élève(s)

Activité sémiotique

x est un nombre entier. Ecris une expression qui représente le triple de x.

Insère cette expression dans la droite algébrique. Ta réponse est correcte ?

Ecris une expression qui représente le successeur du triple de x. Représente l'expression dans la droite algébrique et vérifie ta réponse.

Considère l'expression $x+2x+1$. Compare cette expression avec la précédente. Vérifie la réponse en utilisant DA et MA de AINuSet.



Expression dépendante d'une variable, Identité

L'enseignant utilise AINuSet comme instrument de médiation sémiotique

- Construction de l'expression $3*x$; Déplacement de x sur la droite de façon que $3*x$ soit trois fois la valeur de x
- Déplacement de x sur la droite de façon que les expressions $3*x + 1$ et $x+2x+1$ se superposent
- Post-it pour le vérifier

Signes liés à l'effect

Signes mathématiques

- variable
- expression dépendante d'une variable
- Expressions équivalentes
- quantificateur \forall

Culture

Potentiel sémiotique de AlNuSet

Devoir

Savoir mathématique

	AlNuSet - fonction	AlNuSet- outil	Potentiel sémiotique
Droite Algébrique	Déplacement de x	x se déplace sur la droite dans un certain ensemble numérique	Variable
		une certaine expression dépendante de x se déplace sur la droite, selon le déplacement de x, pour rejoindre une certaine valeur	Inconnue
		une certaine expression, dépendante d'une certaine variable, se déplace sur la droite selon le déplacement de la variable et d'une constante arbitraire	Paramètre
	Post-it	Expressions qui indiquent le même point sur la droite sont représentés dans le même post-it jaune	Équivalence
	E=0	technique quantitative et dynamique: déplacer x sur la droite, de sorte qu'elle chevauche le polynôme à zéro	Racine d'un polynôme
	Modèles géométriques	Modèles géométriques (Théorème du parallélogramme, théorème de Thales) de représentation des opérations arithmétiques	Somme/différence, Multiplication/ division
	Marques colorés	Marque vert: relation vraie pour cette valeur de la variable Marque rouge: relation fausse pour cette valeur de la variable	Ensemble de vérité

Élève(s)



Activité sémiotique

Considère ces deux égalités:

$$2*x+3=5*x$$

$$2*x+3*x=5*x$$

Que penses-tu de ces égalités ?

Que peux-tu observer en déplaçant x sur la droite algébrique lorsque les expressions

$2*x+3$; $2*x+3*x$; $5*x$ sont représentées sur la droite?



équation, Identité

-Déplacement de x sur la droite de façon que les expressions $2*x+3$, $5*x$ et $2*x+3*x$, $5*x$ se superposent
-Post-it pour le vérifier

Signes liés à l'artefact

Signes mathématiques

-équation en tant que égalité conditionnée
-ensemble de vérité en tant que solution de l'équation
-quantificateurs \exists
 \forall

Culture

Élève(s)



Activité sémiotique

Considère ces deux égalités:

$$2*x+3=5*x$$

$$2*x+3*x=5*x$$

Que penses-tu de ces égalités ?

Que peux-tu observer en déplaçant x sur la droite algébrique lorsque les expressions

$2*x+3$; $2*x+3*x$; $5*x$ sont représentées sur la droite

- Déplacement de x sur la droite de façon que les expressions $2*x+3$, $5*x$ et $2*x+3*x$, $5*x$ se superposent
- Post-it pour le vérifier

Signes liés à l'effect

L'enseignant utilise AINuSet comme instrument de médiation sémiotique

Signes mathématiques

- équation en tant que égalité conditionnée
- ensemble de vérité en tant que solution de l'équation
- quantificateurs \exists
 \forall



équation, Identité

Culture

Potentiel sémiotique de AlNuSet

Devoir

Savoir mathématique

	AlNuSet - fonction	AlNuSet- outil	Potentiel sémiotique
Droite Algébrique	Déplacement de x	x se déplace sur la droite dans un certain ensemble numérique	Variable
		une certaine expression dépendante de x se déplace sur la droite, selon le déplacement de x, pour rejoindre une certaine valeur	Inconnue
		une certaine expression, dépendante d'une certaine variable, se déplace sur la droite selon le déplacement de la variable et d'une constante arbitraire	Paramètre
	Post-it	Expressions qui indiquent le même point sur la droite sont représentés dans le même post-it jaune	Équivalence
	E=0	technique quantitative et dynamique: déplacer x sur la droite, de sorte qu'elle chevauche le polynôme à zéro	Racine d'un polynôme
	Modèles géométriques	Modèles géométriques (Théorème du parallélogramme, théorème de Thales) de représentation des opérations arithmétiques	Somme/différence, Multiplication/ division
	Marques colorés	Marque vert: relation vraie pour cette valeur de la variable Marque rouge: relation fausse pour cette valeur de la variable	Ensemble de vérité

Potentiel sémiotique de AlNuSet

Devoir

Savoir mathématique

	AlNuSet - fonction	AlNuSet- outil	Potentiel sémiotique
Manipulateur Algèbre	Sélection d'une partie de l'expression	Sélectionner sur la base de l'opération principale	Identifier les sous expressions (unités de base)
	Couleur jaune des commandes disponibles pour transformer la partie sélectionnée	Identification des analogies formelles (des expressions algébriques)	Sélection des axiomes disponibles
	Choix de la commande	Prévision de la Transformation de l'expression sélectionnée sur la base de la règle/axiome du commande	Choix de l'axiome
	Usage de la commande	Transformation de l'expression sélectionnée sur la base de la règle/axiome du commande	Usage des axiomes pour démontrer l'équivalence entre expressions

Potentiel sémiotique de AlNuSet

Devoir

Savoir mathématique

	AlNuSet - fonction	AlNuSet- outil	Potentiel sémiotique
Plan Cartésien	Montrer valeur selon x	Représentation du Graphe correspondant à l'expression dépendante de x	Graphe de fonction
	Déplacement de x	Déplacement du point correspondant à la couple des valeurs (x ; f(x)) sur le graphe	Variable dépendante et indépendante
	Déplacement d'une lettre « a »	Variation dynamique du graphe sur le plan cartésien selon la variation des valeurs de a	Paramètre

TD1-Thème 2

Deuxième Journée :

LA SIGNIFICATION DE LA NOTION EQUATIONS EQUIVALENTES

Equations et inéquations

tâche 2 : Soient x^2+2 et $2*x+3$ deux polynômes. Quelle est, à ton avis, la signification du signe “=” entre ces deux polynômes ? Représente sur la Droite Algébrique de AlNuSet les expressions x^2+2 et $2*x+3$. Déplace sur la droite x pour vérifier tes hypothèses. Ecrit l'équation $x^2+2=2*x+3$ sur le Manipulateur.



Élève(s)

Quels signes liés à
AINuSet?

Activité sémiotique

Soient x^2+2 et $2*x+3$ deux polynômes. Quelle est, à ton avis, la signification du signe "=" entre ces deux polynômes ? Représente sur la Droite Algébrique de AINuSet les expressions x^2+2 et $2*x+3$. Déplace sur la droite x pour vérifier tes hypothèses. Ecris l'équation $x^2+2=2*x+3$ sur le Manipulateur. ...

...envoie les équations $x^2-2*x-1=0$ et $x^2-2*x=2*x+3$ et l'expression $x^2-2*x-1$ dans la Droite Algébrique d'AINuSet. Utilise la commande $E=0$ pour trouver les racines du polynôme $x^2-2*x-1$.

Observe la couleur des indicateurs associés aux équations $x^2+2=2*x+3$ et $x^2-2*x-1=0$ lorsqu'on déplace le point variable x sur la droite.

Détermine l'ensemble de vérité de l'équation.

Dans le Manipulateur détermine la solution formelle de l'équation.



Quelles Notions
algébriques?

Culture

Significations construits
(en relation aux notions
algébriques objectifs
didactiques)

Analyser
un protocole



But:
Comment AINuSet
a été utilisé par
l'enseignant en tant
qu' instrument de
médiation
sémiotique

LA SIGNIFICATION DE LA NOTION EQUATIONS EQUIVALENTES

1) Soient x^2+2 et $2*x+3$ deux polynômes. **Quelle est, à ton avis, la signification du signe "=" entre ces deux polynômes ? En d'autres termes, explique comment tu peux interpréter l'écriture suivante : $x^2+2=2*x+3$.**

Après avoir répondu à la question, représente sur la Droite Algébrique de AINuSet les expressions x^2+2 et $2*x+3$. Déplace sur la droite le point correspondant à x pour vérifier tes hypothèses.

D : mettre le signe d'égalité signifie que, si on remplace x avec la même valeur dans les deux expressions et en faisant les calculs, on devrait obtenir la même valeur. [...]

F : faisons-le sur la droite...

- Les élèves insèrent les expressions sur la droite

D : regarde : si on déplace x elles coïncident ici mais pas toujours. Nous pouvons écrire. La réponse est correcte, en déplaçant x un petit peu avant de 0,4 elles coïncident.

F : mais nous n'arrivons pas comprendre de quel nombre il s'agit ...il sera 2 virgule quelque chose... même si on utilise zoom in... on n'arrive pas à bien comprendre...

I : oui, mais on voit qu'il existe une valeur

F : d'accord, alors nous pouvons écrire que nous avons vérifié, et donc l'équation a une racine

I : No elle a deux racines parce que même de l'autre côté les expressions sont coïncidentes

F : oui oui deux racines

2) Ecrire l'équation $x^2+2=2*x+3$ sur le Manipulateur. Sélectionner l'équation et appliquer la règle $A = B \leftrightarrow A-B = 0$ pour la transformer.

Envoie le polynôme $x^2-2*x-1$ sur la droite.

Si on déplace x sur la droite algébrique d'AINuSet, qu'est ce que tu penses qu'il arrive aux points

Vocabulaire commun aux élèves de la classe qui en partagent le signifié

Résoudre l'équation signifie trouver les valeurs de x qui rendent vraie l'équation, c'est-à-dire que pour ces valeurs les deux termes de l'équation sont égaux. La solution de l'équation sont les valeurs de x qui rendent vraie l'égalité

Résoudre une équation ça veut dire faire de façon qu'elle soit vraie, ça veut dire trouver une valeur qui rend vraie l'équation

Résoudre l'équation signifie trouver les valeurs de x qui rendent vraie l'équation ; La solution de l'équation sont toutes les valeurs de x qui rendent vraie l'égalité

Qu'est-ce qu'une équation et que signifie résoudre une équation ?

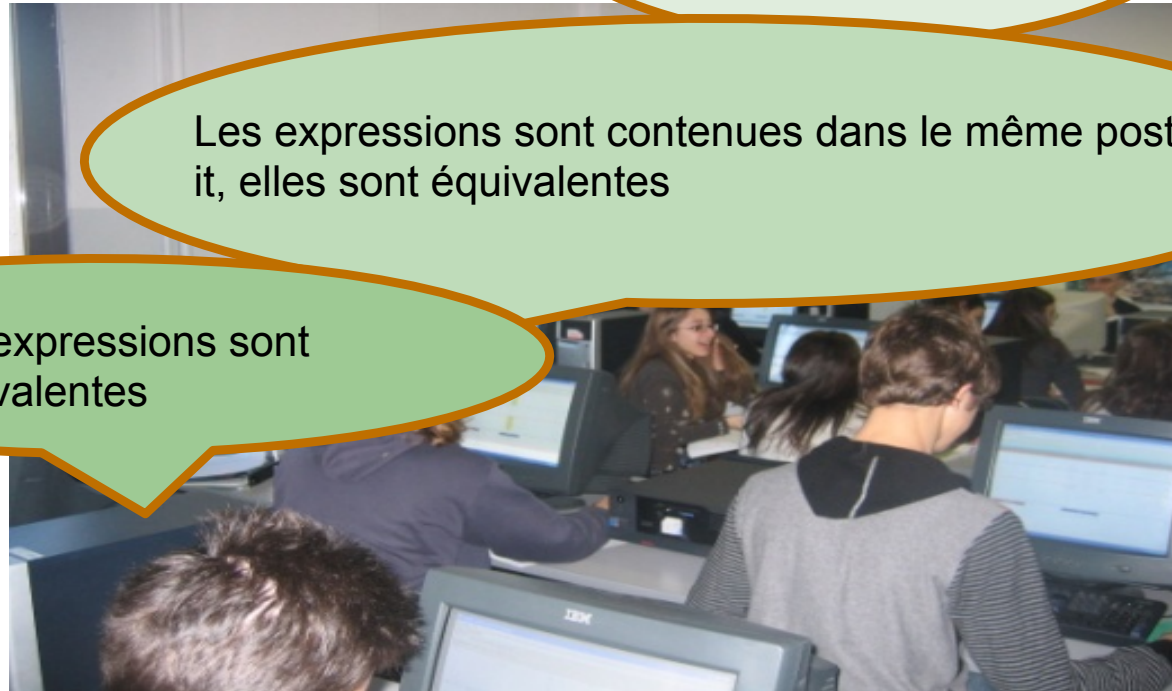


Histoire de la construction de la signification de “expressions équivalentes” dans la classe

Les deux expressions sont
contenues dans le même
post-it

Les expressions sont contenues dans le même post-
it, elles sont équivalentes

Les expressions sont
équivalentes



Vocabulaire commun aux élèves de la classe qui en partagent le signifié.

Que peut-on dire de l'ensemble de vérité d'une équation dont les deux termes sont des expressions équivalentes ?

L'ensemble est infini car, pour n'importe quelle valeur de x , l'égalité est toujours vraie

L'ensemble de vérité contient toutes les valeurs de x

